Lunghezza della circonferenza e area del cerchio

Lunghezza della circonferenza

La lunghezza di una circonferenza e quella del suo diametro sono grandezze direttamente proporzionali e il rapporto tra le loro misure è costante:

$$\frac{C}{d} = \textbf{costante}$$

Il valore di questo rapporto si indica con la lettera **π** (pi greco) e corrisponde a un numero decimale illimitato non periodico (un **numero irrazionale**):

π = 3,14159265358... approssimato in **π = 3,14**

Possiamo quindi scrivere la formula $\frac{C}{d} = \pi$ da cui si ottiene:

$C = \pi \cdot d$ oppure $C = \pi \cdot 2r$

da cui si ricavano le formule inverse:

$d = \frac{C}{\pi}$ e $r = \frac{C}{2\pi}$

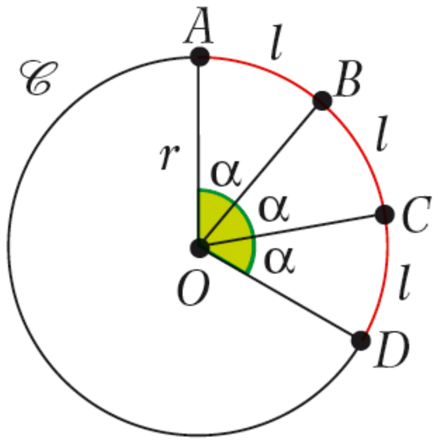
La lunghezza di una circonferenza è uguale al prodotto della lunghezza del suo diametro per π oppure la lunghezza del suo raggio per 2π.

Lattes

Lunghezza di un arco di circonferenza

Disegniamo una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro *O* e raggio *r*, fissiamo su di essa un arco *AB* di lunghezza *l* e indichiamo con α l’ampiezza del corrispondente angolo al centro.

Se l’arco coincide con l’intera circonferenza, allora l’angolo al centro corrispondente diventerà 360°.



Le due grandezze, **lunghezza dell’arco** e **ampiezza dell’angolo al centro**, sono direttamente proporzionali:

$$l : C = \alpha : 360° \qquad \text{oppure} \qquad l : 2\pi r = \alpha : 360°$$

Lunghezza di un arco di circonferenza

Dalla proporzione precedente si ricava:

- l'**ampiezza dell'angolo al centro α**:

  $\alpha = \dfrac{l \cdot 360°}{C}$ oppure $\alpha = \dfrac{l \cdot 360°}{2\pi r}$

- la **lunghezza dell'arco *l***:

  $l = \dfrac{\alpha \cdot C}{360°}$ oppure $l = \dfrac{\alpha \cdot 2\pi r}{360°}$

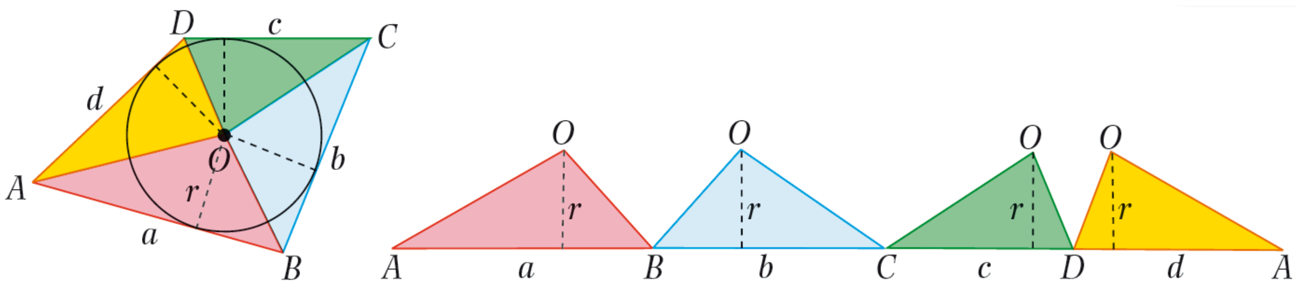
- la misura della **circonferenza *C***:

  $C = \dfrac{l \cdot 360°}{\alpha}$

Area di un poligono circoscritto e di un poligono regolare

L'area di un qualsiasi poligono di *n* lati circoscritto a una circonferenza di centro *O* e raggio *r* equivale alla somma delle aree di *n* triangoli ottenuti unendo i vertici con il centro *O*.

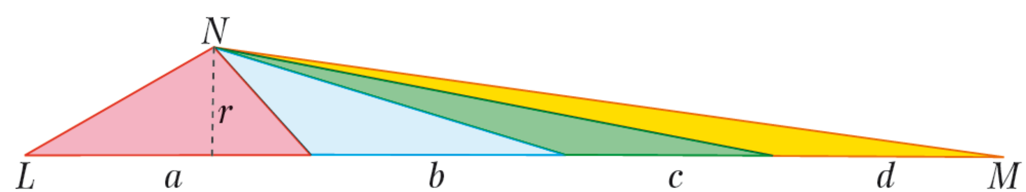
Tali triangoli hanno rispettivamente per basi i lati *a*, *b*, *c*, *d* del poligono e per altezza il raggio *r* della circonferenza inscritta in esso. Sono allora equivalenti a un unico triangolo *LMN* avente per base la somma delle loro basi e per altezza il raggio *r*.



Un poligono circoscritto a una circonferenza è equivalente a un triangolo avente la base uguale al perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza.

L'**area del poligono** è uguale al semiprodotto della misura del perimetro per quella del raggio:

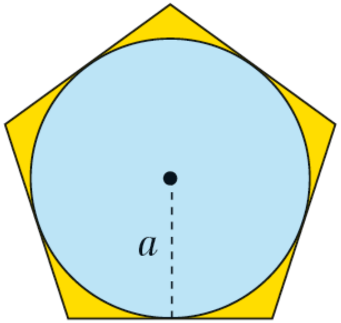
$$A = \frac{2p \cdot r}{2} \qquad r = \frac{2 \cdot A}{2p} \qquad 2p = \frac{2 \cdot A}{r}$$



Lattes

Area di un poligono circoscritto e di un poligono regolare

Se il poligono è regolare, il raggio della circonferenza inscritta coincide con l'apotema, che indichiamo con *a.*



L'**area di un poligono regolare** è uguale al semiprodotto della misura del perimetro per quella dell'apotema:

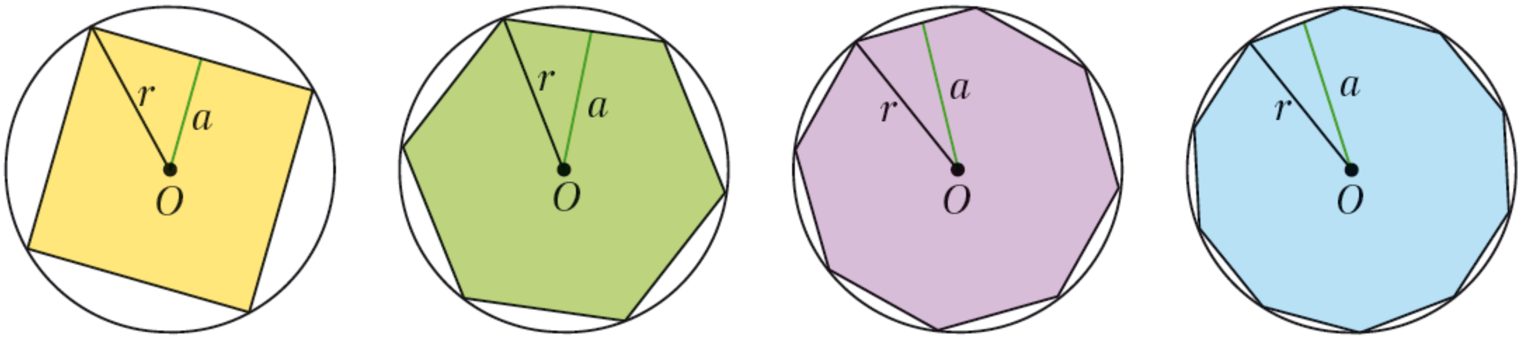
$$A = \frac{2p \cdot a}{2}$$

da cui:

$$a = \frac{2 \cdot A}{2p} \qquad \text{e} \qquad 2p = \frac{2 \cdot A}{a}$$

Area del cerchio

Se inscriviamo in una circonferenza poligoni il cui numero dei lati aumenta, possiamo notare che al crescere del numero dei lati l'apotema del poligono regolare inscritto cresce e si avvicina sempre più al raggio del cerchio circoscritto.



Al crescere del numero dei lati del poligono inscritto:

- la misura del perimetro si avvicina sempre di più a quella della circonferenza;
- la misura dell'apotema si avvicina sempre di più a quella del raggio;
- l'area si avvicina sempre di più a quella del cerchio.

Area del cerchio

Le precedenti osservazioni ci fanno intuire che un cerchio è equivalente al poligono regolare inscritto con un numero infinito di lati e quindi con il perimetro congruente alla circonferenza ($2p = C$) e l'apotema congruente al raggio ($a = r$).

Poiché l'area di un poligono è:

$$A_{\text{poligono}} = \frac{2p \cdot a}{2}$$

l'area di un cerchio si può scrivere come:

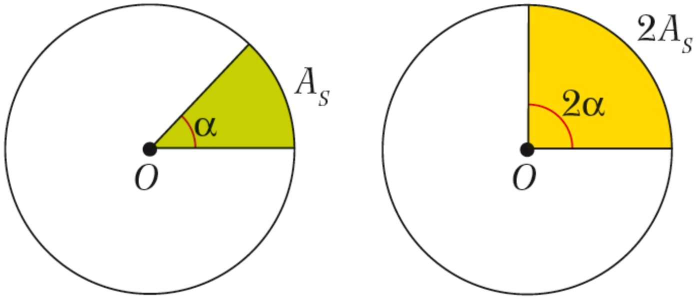
$$A_{\text{cerchio}} = \frac{C \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

L'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato della misura del raggio per π.

Area delle parti del cerchio

AREA DEL SETTORE CIRCOLARE

Disegniamo un cerchio di centro O e raggio r e in esso settori circolari di ampiezza α, 2α, 3α... Raddoppiando o triplicando l'ampiezza, anche l'area del settore circolare corrispondente raddoppia o triplica. Se il settore coincide con tutto il cerchio, l'angolo al centro corrispondente diventerà 360°.



area settore A_S	ampiezza angolo α
A_S	α
$2 \cdot A_S$	$2 \cdot \alpha$
$3 \cdot A_S$	$3 \cdot \alpha$
....	....
A_C	$360°$

Le due grandezze, **ampiezza dell'angolo al centro** (α) e **area del settore circolare** (A_S) sono direttamente proporzionali:

$$\boldsymbol{A_S : A_C = \alpha : 360°} \quad \text{oppure} \quad \boldsymbol{A_S : \pi r^2 = \alpha : 360°}$$

L'**area di un settore circolare** si ottiene dividendo l'area del cerchio a cui appartiene per 360° e moltiplicando il quoziente ottenuto per l'ampiezza del corrispondente angolo al centro espresso in gradi:

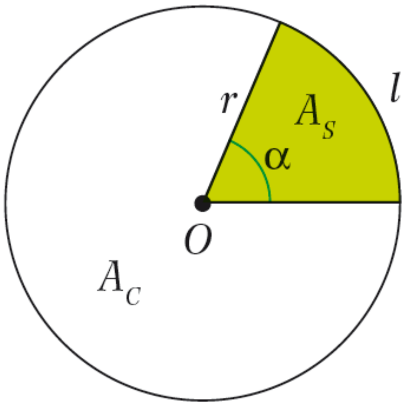
$$A_S = \frac{A_C \cdot \alpha}{360°} \qquad \text{oppure} \qquad A_S = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360°}$$

Area delle parti del cerchio

AREA DEL SETTORE CIRCOLARE NOTA LA LUNGHEZZA DELL'ARCO E IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA

Si può calcolare l'area del settore circolare anche conoscendo la lunghezza *l* dell'arco e il raggio *r* della circonferenza:

$$l : C = A_s : A_c$$

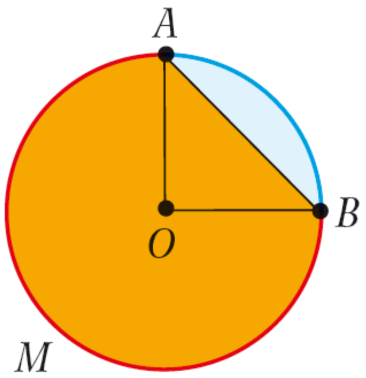


L'**area del settore circolare** si ottiene dividendo per 2 il prodotto della lunghezza dell'arco e della misura del raggio della circonferenza:

$$A_S = \frac{l \cdot r}{2}$$

Area delle parti del cerchio

AREA DEL SEGMENTO CIRCOLARE



Tracciando in un cerchio una corda qualsiasi *AB*, otteniamo due **segmenti circolari.**

- **Segmento circolare minore del semicerchio** (parte azzurra):

  $A_{\text{segmento circolare}} = A_S - A_{AOB}$

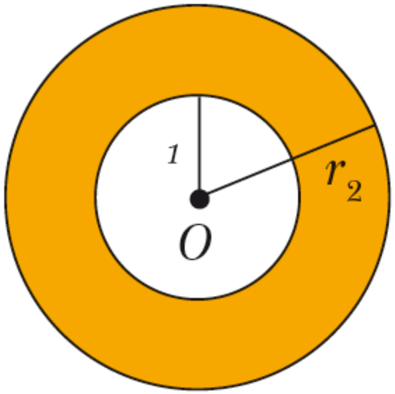
- **Segmento circolare maggiore del semicerchio** (parte arancione):

  $A_{\text{segmento circolare}} = A_S + A_{AOB}$

Lattes

Area delle parti del cerchio

AREA DELLA CORONA CIRCOLARE



L'**area di una corona circolare** si ottiene sottraendo dall'area del cerchio maggiore l'area del cerchio minore:

$$A_{corona} = \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$