



# Operazioni con le frazioni



# Addizione di frazioni e numeri misti

L'insieme  $\mathbf{Q}^+$  è un ampliamento dell'insieme  $\mathbf{N}$ , per cui le operazioni con le frazioni devono avere le stesse proprietà e caratteristiche viste in  $\mathbf{N}$ .

## ADDIZIONE DI FRAZIONI CON LO STESSO DENOMINATORE

La **somma** di più frazioni aventi lo stesso denominatore è la frazione che ha per numeratore la somma dei numeratori e per denominatore il denominatore comune.

$$\frac{5}{7} + \frac{3}{7} = \frac{8}{7}$$

## ADDIZIONE DI FRAZIONI CON DENOMINATORE DIVERSO

Per addizionare più frazioni aventi denominatori diversi occorre ridurle al minimo comune denominatore (m.c.d.).

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{4} = \frac{12}{28} + \frac{7}{28} = \frac{19}{28}$$

# Addizione di frazioni e numeri misti

## NUMERI MISTI

Addizionando un numero naturale con una frazione propria si ottiene un **numero misto**, cioè un numero composto da una parte intera e da una parte frazionaria:

$$\text{parte intera} \longrightarrow 5 + \frac{2}{3} \longleftarrow \text{parte frazionaria}$$

- Si può **trasformare un numero misto in una frazione impropria**:

$$5 + \frac{2}{3} = \frac{5}{1} + \frac{2}{3} = \frac{5 \times 3 + 2}{3} = \frac{15 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$

- Si può **scrivere una frazione impropria sotto forma di numero misto**:

$$\frac{17}{3} = \frac{15 + 2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

# Sottrazione di frazioni e frazione complementare

## SOTTRAZIONE DI FRAZIONI CON LO STESSO DENOMINATORE

La **differenza** tra due frazioni aventi lo stesso denominatore è la frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore e per numeratore la differenza fra i numeratori delle frazioni date.

$$\frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

## SOTTRAZIONE DI FRAZIONI CON DENOMINATORE DIVERSO

Per sottrarre due frazioni aventi denominatori diversi occorre ridurle al minimo comune denominatore (m.c.d.).

$$\frac{7}{4} - \frac{3}{10} = \frac{35}{20} - \frac{6}{20} = \frac{29}{20}$$

# Sottrazione di frazioni e frazione complementare

## FRAZIONE COMPLEMENTARE

Se si sottrae dall'unità una frazione propria si ottiene la frazione complementare della frazione data:

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$$

La frazione complementare rappresenta la parte da aggiungere alla frazione data per ottenere l'intero.

Due frazioni si dicono **complementari** se la loro somma è 1.

# Moltiplicazione di frazioni e frazioni reciproche

Il **prodotto** di due o più frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

## FRAZIONE RECIPROCA O INVERSA

La frazione **reciproca** o **inversa** di una frazione data si ottiene scambiando il numeratore con il denominatore:

$\frac{8}{7}$  è la frazione reciproca di  $\frac{7}{8}$

Due frazioni si dicono **reciproche** se il loro prodotto è l'unità:

$$\frac{8}{7} \times \frac{7}{8} = 1$$

# Divisione e frazioni a termini frazionari

Il **quoziente** di due frazioni, di cui la seconda diversa da zero, è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima per l'inverso della seconda.

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{9}$$

Come nell'insieme  $\mathbf{N}$ , anche nell'insieme  $\mathbf{Q}^+$  la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione.

Possiamo sempre calcolare il quoziente di due numeri razionali a eccezione, come accade nell'insieme  $\mathbf{N}$ , dei seguenti casi:

$$\begin{array}{ll} \frac{m}{n} : 0 & \text{impossibile} \\ 0 : 0 & \text{indeterminata} \end{array}$$

# Divisione e frazioni a termini frazionari

## FRAZIONE A TERMINI FRAZIONARI

Una **frazione a termini frazionari** è una frazione in cui il numeratore e il denominatore sono due frazioni oppure un numero intero e una frazione.

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} \quad \text{indica la divisione} \quad \frac{5}{3} : \frac{4}{3} = \frac{5}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\frac{8}{2}}{\frac{2}{3}} \quad \text{indica la divisione} \quad 8 : \frac{2}{3} = \overset{4}{8} \cdot \frac{3}{\cancel{2}_1} = 12$$

$$\frac{\frac{9}{2}}{\frac{6}{2}} \quad \text{indica la divisione} \quad \frac{9}{2} : 6 = \frac{\overset{3}{9}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_2} = \frac{3}{4}$$

Nella frazione a termini frazionari il **simbolo** della **divisione** è rappresentato da una linea di frazione che è più lunga di quella delle frazioni scritte al numeratore e al denominatore.



# Elevamento a potenza

La potenza di una frazione è il prodotto di tante frazioni uguali alla base quante ne indica l'esponente.

$$\left(\frac{7}{3}\right)^4 = \frac{7}{3} \times \frac{7}{3} \times \frac{7}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{7^4}{3^4}$$

La **potenza** di una frazione è una frazione avente per numeratore la potenza del numeratore e per denominatore la potenza del denominatore.

$$\left(\frac{7}{3}\right)^4 = \frac{7^4}{3^4} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{potenza del numeratore} \\ \longrightarrow \text{potenza del denominatore} \end{array}$$

# Elevamento a potenza

Le stesse proprietà studiate per le potenze nell'insieme  $\mathbf{N}$  valgono per le potenze di frazioni.

## POTENZE CON LA STESSA BASE

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2+3} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \quad \left(\frac{2}{7}\right)^6 : \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{2}{7}\right)^{6-3} = \left(\frac{2}{7}\right)^3 \quad \left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2 \times 3} = \left(\frac{3}{5}\right)^6$$

Ricorda:  $\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$        $\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$

## POTENZE CON LO STESSO ESPONENTE

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{7}{4}\right)^4 = \left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{4}\right)^4 = \left(\frac{7}{6}\right)^4$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^5 : \left(\frac{3}{20}\right)^5 = \left(\frac{3}{5} : \frac{3}{20}\right)^5 = \left(\frac{3}{5} \times \frac{20}{3}\right)^5 = \left(\frac{4}{1}\right)^5 = (4)^5$$

# Espressioni con le frazioni

Le **espressioni aritmetiche** contenenti frazioni si risolvono in modo analogo a quello seguito per il calcolo di un'espressione contenente solo numeri naturali.

Si eseguono:

- prima le potenze, le moltiplicazioni e le divisioni nell'ordine in cui si presentano;
- poi le addizioni e le sottrazioni nell'ordine in cui si presentano.

Per quanto riguarda le parentesi:

- se in un'espressione ci sono parentesi tonde, quadre e graffe si eseguono prima i calcoli racchiusi nelle tonde, poi quelli racchiusi nelle quadre e infine quelli racchiusi nelle graffe;
- è opportuno ridurre le frazioni ai minimi termini e semplificare tutte le volte che è possibile, altrimenti i numeri crescono e con loro gli errori di calcolo.

# Problemi con le frazioni

## CALCOLARE LA FRAZIONE DI UN NUMERO O DI UNA GRANDEZZA

Per calcolare il valore  $p$  della parte frazionaria  $\frac{m}{n}$  di un numero o di una grandezza  $a$  si moltiplica il numero o la grandezza per la frazione  $\frac{m}{n}$ :

$$p = \frac{m}{n} \times a$$

48 persone partecipano a una gita in Toscana.  $\frac{3}{8}$  sono donne. Quante sono?

### DATI

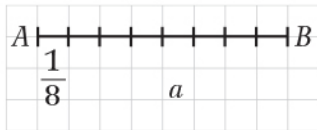
$a = 48$  partecipanti alla gita

$$b = \frac{3}{8} a$$

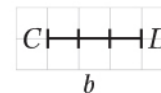
### INCOGNITA

$b = n^\circ$  donne

## RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



$a = 48$  partecipanti alla gita



$b = \frac{3}{8}$  di  $a$

## SVOLGIMENTO

Dobbiamo calcolare  $\frac{3}{8}$  di 48:

$$48 : 8 = 6$$

$$b = 6 \times 3 = 18 \text{ n}^\circ \text{ donne}$$

In modo abbreviato si scrive:

$$b = \frac{3}{8} \times 48 = 18$$

# Problemi con le frazioni

## CALCOLARE IL VALORE DI UN NUMERO O DI UNA GRANDEZZA DATA UNA LORO FRAZIONE

Per calcolare un numero o una grandezza  $a$  quando si conosce il valore  $p$  di una sua parte frazionaria  $\frac{m}{n}$  si divide il valore  $p$  di tale parte per la frazione  $\frac{m}{n}$ :  $a = p : \frac{m}{n}$

*In un'assemblea di condominio ci sono 6 assenti che corrispondono a  $\frac{2}{9}$  del totale. Quanti sono i condomini che dovrebbero essere presenti all'assemblea?*


### DATI

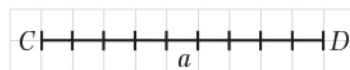
$b = 6$  n° condomini assenti

### INCOGNITA

$a = n^\circ$  totale condomini

### RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

  $b = 6$  n° condomini assenti corrispondenti a  $\frac{2}{9}$  del totale

  $a = n^\circ$  totale condomini cioè  $\frac{9}{9}$

### SVOLGIMENTO

Dobbiamo calcolare il valore dell'intero, cioè  $\frac{9}{9}$ :

$$6 : 2 = 3$$

$$a = 3 \times 9 = 27 \text{ n}^\circ \text{ totale condomini}$$

In modo abbreviato si scrive:  $a = 6 : \frac{2}{9} = 6 \times \frac{9}{2} = 27$

# Problemi con le frazioni

## CALCOLARE IL VALORE DI DUE NUMERI O DI DUE GRANDEZZE CONOSCENDO LA LORO SOMMA E SAPENDO CHE UNO DI ESSI È UNA FRAZIONE DELL'ALTRO

Per calcolare due numeri o due grandezze di cui si conosce la somma e sapendo che uno è una frazione dell'altro, si divide tale somma per la somma del numeratore e del denominatore e si moltiplica il quoziente ottenuto rispettivamente per il numeratore e per il denominatore.

*Noemi e Sara collezionano peluches. Tra tutte e due ne hanno 45 e Noemi ne possiede  $\frac{4}{5}$  di quelli di Sara. Quanti peluches ha ciascuna di loro?*

### DATI

$$a + b = 45 \text{ n}^\circ \text{ peluches totali}$$

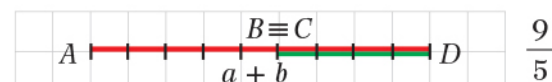
$$b = \frac{4}{5} \times a$$

### INCOGNITA

$$a = \text{n}^\circ \text{ peluches Sara}$$

$$b = \text{n}^\circ \text{ peluches Noemi}$$

### RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



### SVOLGIMENTO

$$\frac{4}{5} + \frac{5}{5} = \frac{9}{5}$$

$$a = 5 \times 5 = 25 \text{ n}^\circ \text{ peluches Sara}$$

$$45 : 9 = 5$$

$$b = 5 \times 4 = 20 \text{ n}^\circ \text{ peluches Noemi}$$

# Problemi con le frazioni

## CALCOLARE IL VALORE DI DUE NUMERI O DI DUE GRANDEZZE CONOSCENDO LA LORO DIFFERENZA E SAPENDO CHE UNO DI ESSI È UNA FRAZIONE DELL'ALTRO

Per calcolare due numeri o due grandezze di cui si conosce la differenza e sapendo che uno è una frazione dell'altro, si divide tale differenza per la differenza tra il denominatore e il numeratore e si moltiplica il quoziente ottenuto rispettivamente per il numeratore e per il denominatore.

*Luciano vende tessuti al mercato e possiede due pezze di stoffa. Una pezza è lunga  $\frac{2}{5}$  dell'altra e la loro differenza misura 24 m. Quanto è lunga ciascuna pezza di stoffa?*

### DATI

$$a - b = 24 \text{ m}$$

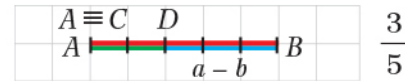
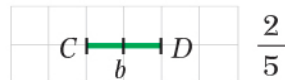
$$b = \frac{2}{5} \times a$$

### INCOGNITA

$a$  = lunghezza maggiore

$b$  = lunghezza minore

### RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



### SVOLGIMENTO

$$\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$a = 8 \times 5 = 40 \text{ lunghezza maggiore}$$

$$24 : 3 = 8 \text{ m}$$

$$b = 8 \times 2 = 16 \text{ n}^\circ \text{ lunghezza minore}$$